Programme de colle n°23

semaine du 1 au 5 avril

Notions vues en cours

Chapitre 25 : Espaces vectoriels *(en complément de la semaine dernière)*

- Sous-espace engendré par une partie X : définition, notation $\text{vect}(X)$, c'est le plus petit s.e.v. qui contient X, caractérisation par les combinaison linéaires
- Sous-espace engendré par une famille de vecteurs, famille génératrice (finie)
- Famille libre (finie) / liée, vecteurs colinéaires, caractérisation du caractère lié d'une famille de 2 / n vecteurs
- Sur-famille, sous-famille, toute sur-famille d'une famille génératrice l'est également, toute sous-famille d'une famille libre l'est également
- Base : définition, caractérisation en termes d'existence et d'unicité des scalaires, coordonnées d'un vecteur dans une base donnée, bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathbb{K}_n[X]$
- Somme de deux s.e.v. : définition, c'est un s.e.v., $F+G = \text{Vect}(F\cup G)$, quelques propriétés simples ($F+F = F$, etc.)
- Somme directe de deux s.e.v. : définition, notation $F \oplus G$, caractérisation par $F \cap G$
- S.e.v. supplémentaires dans un e.v. : définition, caractérisations
- Famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ presque nulle, notation $\mathbb{K}^{(I)}$, support
- Extension des notions vues pour des familles finies à des familles pouvant être infinies : combinaisons linéaires, s.e.v. engendré par une famille de vecteurs, famille génératrice, famille libre, base
- Hors-programme MPSI : notion de $\mathbb{K}$-algèbre (commutative ou non) avec des exemples usuels
- Vu en TD : méthode pour décrire un s.e.v. sous la forme d'une équation à la forme d'un Vect et réciproquement, par exemple $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\right\} = \text{Vect}\left((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\right)$

La notion de dimension n'est pas au programme de cette semaine et n'est pas exigible pour les exercices.

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés “non-officiel”), parmi les chapitres **23 à 25**. *Des exemples de questions figurent en page suivante.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Sans démonstration : définitions (dans le cas d'une famille finie) du s.e.v. engendré par une famille de vecteurs, d'une famille génératrice, d'une famille libre, d'une famille liée, d'une base Chapitre 25, Définitions / Propriétés 25.15, 25.16, 25.17, 25.25
   Inutile de réécrire chaque encadré en entier : la partie “mathématique” suffit. Par exemple $(g_1, \cdots, g_n)$ est une famille génératrice de E si $\text{Vect}(g_1, \cdots, g_n) = E$.
2. La somme de deux s.e.v. est un s.e.v. (la démonstration a été faite en cours) Chapitre 25, Propriété 25.27
3. Caractérisation que deux s.e.v. soient en somme directe (avec démonstration), définition du supplémentaire d'un s.e.v. et caractérisation que deux s.e.v. soient supplémentaires (sans démonstration). Chapitre 25, Définitions / Propriétés 25.30, 25.31, 25.32

Exemples de questions libres :

Chapitre 23 :

- Donner la définition de "f est dominée par g au voisinage de a" ainsi que sa notation. Quelle est la condition sur g pour que ceci ait un sens ?
- Soit les assertions $P : f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$ et $Q : f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$. Est-ce que $P \implies Q$? Est-ce que $Q \implies P$? Justifier.
- Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner un équivalent de $x^2 + ax$ lorsque x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0, en distinguant bien chaque cas.
- Donner un équivalent de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} - 1$ quand x tend vers 0.
- Soit f, g, u trois fonctions. On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$. Donner une condition nécessaire sur u qui permet d'assurer que $f \circ u \underset{0}{\sim} g \circ u$.

Chapitre 24 :

- Donner la forme générale d'un DL à l'ordre n en un point a d'une fonction f (en supposant qu'un tel DL existe).
- Si f admet un DL à l'ordre 0 en a, que peut-on déduire sur $\lim\limits_{x \to a} f(x)$?
- Énoncer la formule de Taylor-Young (on pourra préciser les hypothèses à l'oral).
- Si $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n)$, quel DL peut-on en déduire pour une primitive F de f ?
- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(x) = \alpha + \beta(x-a) + (x-a)^2 + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^2\right)$. Donner un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers a.

Chapitre 25 :

- Compléter la définition suivante : $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. si $(E, +)$ est un groupe abélien et si les assertions suivantes sont vérifiées : ...
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $X \subset E$. Donner la définition en termes d'ensemble de $\mathrm{Vect}(X)$.
- Que peut-on dire d'une sur-famille ou d'une sous-famille pour une famille génératrice ? Pour une famille liée ? Pour une famille libre ?
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et F, G deux s.e.v. de E. Si on a $u \in F \oplus G$, que peut-on en déduire sur u ?
- Soit I un ensemble quelconque et $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I$. Que signifie l'assertion "$(\lambda_i)_{i \in I}$ est presque nulle" ?